Σχέση ισοδυναμίας / Κλάση ισοδυναμίας / Διαμέριση

- Μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου A, είναι ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times A$, $R \subseteq A \times A$, το οποίο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. $\forall x \in A : (x,x) \in R$ (ανακλαστική ιδιότητα)
2. $\forall x,y \in A : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ (συμμετρική ιδιότητα)
3. $\forall x,y,z \in A : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ (μεταβατική ιδιότητα)

- Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου A.

Αν $x \in A$, η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς την R, ορίζεται να είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$[x]_R = \{ y \in A : yRx \} \subseteq A$$

Επειδή xRx, η $[x]_R$ είναι πάντοτε μη κενό σύνολο.

- Έστω A ένα μη κενό σύνολο.

Μια διαμέριση του A είναι μια συλλογή υποσυνόλων $\Delta = \{ X_i : X_i \subseteq A \}$, όπου $i \in I$ με I ένα σύνολο δεικτών, ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

i) $\forall i \in I \quad X_i \neq \emptyset$

ii) $\forall i,j \in I, i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$

iii) $A = \bigcup_{i \in I} X_i$

Παράδειγμα: 1]

$$\mathbb{Z} = \{\overset{A}{\text{Άρτιοι}}\} \cup \{\overset{\Pi}{\text{Περιττοί}}\}$$

Η διαμέριση $\mathbb{Z} = A \cup \Pi$ ορίζει σχέση ισοδυναμίας $(n, m) \in R$ ανν $n, m \in A$ ή $n, m \in \Pi$

Η σχέση ισοδυναμίας είναι, η ισοδυναμεί με $m \iff n - m$ διαιρείται από το 2.

(Είναι, $A = [0]$, $\Pi = [1]$, όπου 0,1 τα υπόλοιπα διαίρεσης με το 2)

2] Να εξετάσετε αν στο σύνολο $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ η σχέση R με $(n, m) R (\kappa, \lambda) \iff n + \lambda = m + \kappa$, είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθούν (εφόσον είναι) οι κλάσεις ισοδυναμίας της.

// Είναι:

$\forall (x,x) \in A$: $x + x = x + x \iff (x,x) R (x,x)$, άρα R ανακλαστική. ①

$\forall (x,y)(z,w) \in A$: $(x,y) R (z,w) \iff x + w = y + z \iff z + y = w + x$

$\iff (z,w) R (x,y)$, άρα R συμμετρική ②

$\forall (x,y)(z,w)(f,h) \in A$: $(x,y) R (z,w) \wedge (z,w) R (f,h) \iff$

$$\begin{cases} x + w = y + z \\ \text{και} \\ z + h = w + f \end{cases} \iff \begin{cases} z - w = x - y \\ \text{και} \\ z - w = f - h \end{cases} \iff x - y = f - h \iff x + h = y + f$$

$\iff (x,y) R (f,h)$,

άρα R μεταβατική ③. Από ①,②,③ R είναι σχέση ισοδυναμίας επί του A.

Για τις κλάσεις ισοδυναμίας:

<u>$(0,0)$</u>

$(0,0) R (x,y) \iff 0+y=0+x \iff y=x$, οπότε

$[(0,0)]_R = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ (1)

<u>$(n,0)$</u>, όπου n τυχαίος φυσικός

$(n,0) R (x,y) \iff n+y=0+x \iff x=n+y$, οπότε

$[(n,0)]_R = \{(y+n, y) \mid y, n \in \mathbb{N}\}$ (2)

<u>$(0,n)$</u>, όπου n τυχαίος φυσικός

$(0,n) R (x,y) \iff 0+y=n+x \iff y=n+x$, οπότε

$[(0,n)]_R = \{(x, x+n) \mid x, n \in \mathbb{N}\}$ (3).

<u>(ℓ,m)</u>, όπου n, m τυχαίοι φυσικοί.

Έστω $\ell > m$. Τότε $\ell = m + \ell_0$ με $\ell_0 \in \mathbb{N}$, οπότε $(\ell, m) = (m+\ell_0, m)$ $\in [(n,0)]_R$. Όμοιως αν $m > \ell$. (4).

Από (1), (2), (3), (4) $A = [(0,0)]_R \cup [(n,0)]_R \cup [(0,n)]_R$

Πράξεις / Ομάδες.

Μια πράξη, $\square$, σ' ένα σύνολο A είναι μια απεικόνιση $\square : A \times A \to A$, δηλαδή ένα ζεύγος στοιχείων του A αντιστοιχίζεται σ' ένα στοιχείο του A.
Γράφουμε: $\alpha \square \beta$

Επειδή $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$ μπορεί να έχουμε $\alpha \square \beta \neq \beta \square \alpha$
Αν ισχύει ότι $\alpha \square \beta = \beta \square \alpha$, για κάθε ζεύγος, η πράξη θα καλείται αντιμεταθετική ή αβελιανή.

Μια πράξη $\square$ θα λέμε ότι είναι καλά ορισμένη, αν $\alpha \square \beta$ είναι στοιχείο του A για κάθε ζεύγος (α, β).

Παράδειγμα: 1) Η πράξη της αφαίρεσης $(-)$ δεν ορίζεται στο $\mathbb{N}$, $3-5 \notin \mathbb{N}$, ενώ ορίζεται στο $\mathbb{Z}$, δίχως όμως να είναι αβελιανή: $5-3 \neq 3-5$.

2) Η διαίρεση δεν ορίζεται στους ακεραίους: $1, 2 \in \mathbb{Z} \wedge 1/2 \notin \mathbb{Z}$

3) Η πράξη $\alpha \square \beta = \alpha^2 + \beta^2 + 1$ ορίζεται στα σύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

4) Το γινόμενο των πινάκων στο σύνολο των $n \times n$ πινάκων δεν είναι μεταθετικό

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Έστω $\Omega(A)$ το δυναμοσύνολο του A, δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Στο $\Omega(A)$ ορίζεται η πράξη της τομής

$\cap : \Omega(A) \times \Omega(A) \to \Omega(A)$, $K \cap \Lambda$.

Η πράξη αυτή είναι αβελιανή, $K \cap \Lambda = \Lambda \cap K$

Μια πράξη $\square$ σ' ένα σύνολο A καλείται προσεταιριστική, αν ισχύει

$$\alpha \square (\beta \square \gamma) = (\alpha \square \beta) \square \gamma, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in A$$

Παράδειγμα: 1) Η πράξη της αφαίρεσης $(-)$ ορίζεται στο $\mathbb{Z}$, αλλά δεν είναι προσεταιριστική. $(1-2)-3 \neq 1-(2-3)$

2) Η πράξη με τύπο $\alpha \square \beta = 2(\alpha+\beta), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, είναι μεταθετική αλλά όχι προσεταιριστική.

Άσκηση: Να βρεθούν τα α, β ώστε η πράξη $\square : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $x \square y = \alpha x + \beta y$, να είναι προσεταιριστική.

Λύση

Είναι:

$$x \square (y \square z) = (x \square y) \square z \Rightarrow \alpha x + \beta(\alpha y + \beta z) = \alpha(\alpha x + \beta y) + \beta z$$

Επειδή αυτή η σχέση ισχύει $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, θα έχουμε

$$\begin{cases} \alpha = \alpha^2 \\ \alpha\beta = \beta\alpha \\ \beta = \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0,1 \\ \beta = 0,1 \end{matrix}$$

Άρα $x \square y = x \ \vee \ x \square y = y \ \vee \ x \square y = x+y \ \vee \ x \square y = 0$.

Άσκηση: Δίνεται το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και μια πράξη $\square$ στο A, τ.ω

$\square$	α	β	γ	δ
α	α	γ	β	δ
β	γ	α	δ	β
γ	β	δ	α	γ
δ	δ	β	γ	α

Εξετάστε αν είναι μεταθετική ή προσεταιριστική.

Λύση

Μεταθετικότητα:

Λόγω της συμμετρικότητας του πίνακα της πράξης, η πράξη είναι αβελιανή

Προσεταιριστικότητα:

Είναι,

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha \square \delta) \square \gamma = \delta \square \gamma = \gamma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq \\ \text{και} \quad \alpha \square (\delta \square \gamma) = \alpha \square \gamma = \beta \end{array}\right\} \text{Η } \square \text{ δεν είναι προσεταιριστική.}$$

3) Στο σύνολο με $\mathbb{Z}_\nu = \{0_R, 1_R, \dots, (\nu-1)_R\}$ των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς υπόλοιπα του ν, $\bmod \nu$, ορίζουμε μια πράξη ως εξής.

$$\alpha_R \oplus \beta_R = \gamma_R \text{ ανν } \alpha+\beta \;\; \gamma = \kappa\nu \text{ (είναι πολλαπλάσιο του } \nu)$$

$$\alpha_R \odot \beta_R = \gamma_R \text{ ανν } \alpha\beta-\gamma = \lambda\nu \text{ (είναι πολλαπλάσιο του } \nu)$$

Θα δείξουμε ότι οι πράξεις αυτές είναι συμβιβαστές με τη σχέση ισοδυναμίας και δεν εξαρτώνται από τον αντιπρόσωπο. Οπότε θα είναι καλά ορισμένες.
Θα δείξουμε επιπλέον ότι: $\alpha_R \oplus \beta_R = (\alpha+\beta)_R$ και $\alpha_R \odot \beta_R = (\alpha\beta)_R$

Έστω $\alpha_R = \gamma_R$ και $\beta_R = \delta_R$, θα δείξουμε ότι $\alpha_R \oplus \beta_R = \gamma_R \oplus \delta_R$

Οι δυο πρώτες ισότητες δίνουν $\alpha-\gamma = \kappa\nu$ και $\beta-\delta = \lambda\nu$.
Άρα $\alpha+\beta-(\gamma+\delta) = (\kappa+\lambda)\nu$, δηλαδή αυτό που θέλαμε.
Έστω $\alpha_R = \gamma_R$ και $\beta_R = \delta_R$, θα δείξουμε ότι $\alpha_R \odot \beta_R = \gamma_R \odot \delta_R$
Οι δυο πρώτες ισότητες δίνουν $\alpha-\gamma = \kappa\nu$ και $\beta-\delta = \lambda\nu$.
Άρα, $\alpha\gamma-\beta\delta = \alpha\gamma-\alpha\delta+\alpha\delta-\beta\delta = \alpha\lambda\nu+\kappa\nu\delta = (\alpha\lambda+\kappa\delta)\nu$,
δηλαδή αυτό που θέλαμε.

Ακόμη, $\alpha_R \oplus \beta_R = (\alpha+\beta)_R$ ανν $\alpha+\beta-(\alpha+\beta)=0$, που είναι πολ/σιο του V.

Ομοίως και για το γινόμενο.

Ημιομάδες

Έστω μια πράξη $\square$ σ' ένα σύνολο A, $\square : A\times A \to A$.
Το ζεύγος $(A, \square)$ θα καλείται ημιομάδα, ανν η πράξη $\square$ είναι προσεταιριστική στο A.

Μονοειδή

Μια ημιομάδα θα καλείται μονοειδές, ανν υπάρχει στοιχείο ε στο A, με $\alpha \square \varepsilon = \varepsilon \square \alpha = \alpha$, $\forall\, \alpha \in A$.
Το ε θα καλείται ουδέτερο στοιχείο ή μοναδιαίο, αναλόγως την $\square$

Ομάδες - Αβελιανές Ομάδες

Ένα μονοειδές για το οποίο ισχύει ότι, για κάθε α υπάρχει β στο A, με $\beta \square \alpha = \alpha \square \beta = \varepsilon$, θα καλείται ομάδα.
Αν επιπλέον η πράξη είναι και αβελιανή, θα καλείται αβελιανή ομάδα.
Το β θα καλείται αντίθετο στοιχείο ή αντίστροφο, αναλόγως την $\square$

Παράδειγμα: 1) Τα ζεύγη $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ είναι μονοειδή (αβελιανά).
2) Το ζεύγος $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
3) Το ζεύγος $(\mathbb{Z}, \cdot)$ είναι αβελιανό μονοειδές.
4) Τα ζεύγη $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^{+}, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες.
5) Το σύνολο των $n\times m$ πινάκων με την πρόσθεση, είναι αβελιανή ομάδα.
6) Το σύνολο των $n\times n$ πινάκων με τον πολ/μο είναι μονοειδές.
7) Το ζεύγος $(\mathbb{C}^{*}, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Συμβιβαστές πράξεις

Αν ένα σύνολο A είναι εφοδιασμένο με δυο πράξεις $\oplus, \odot$, τ.ω να ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{cases} \alpha \odot (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma) \\ (\alpha \oplus \beta) \odot \gamma = (\alpha \odot \gamma) \oplus (\beta \odot \gamma) \end{cases}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in A,$$

οι πράξεις $\oplus, \odot$ θα καλούνται συμβιβαστές επί του A

(Ασκήσεις για Τετάρτη)

- Είναι το $3\mathbb{Z}$ ομάδα με την πράξη $+$;
- Είναι το $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ομάδα με $(x,y) \square (z,w) = (x+z, y-w)$;
- Είναι το $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ ομάδα με $(x,y) \square (z,w) = (x+z, yw)$;